Théorème de projection sur un convexe fermé

Théorème : Soit $(H, \langle , \rangle)$ un Hilbert de dimension finie et $C \subset H$ un convexe fermé.
i) Pour tout $x \in H$ il existe un unique $y \in C$ tel que $d(x, C) = d(x, y)$. On note alors $p_C(x)$ cet élément.
ii) L'élément $p_C(x)$ est caractérisé par la propriété suivante :

$$y \in C \text{ et } \forall z \in C, \langle x - y, z - y\rangle \leq 0$$

Corollaire 1 : Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors
i) $F^{\perp}$ est fermé
ii) $F \oplus F^{\perp} = H$
iii) $F = F^{\perp\perp}$

Corollaire 2 : Si F est un sous-espace vectoriel quelconque de H alors

$$\overline{F} = H \iff F^{\perp} = \{0\}.$$

Preuve du théorème : Commençons par l'existence. Soit $\delta = d(x, C)$. Par définition, la distance à une parti est un inf donc on peut l'approcher avec une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C. Ainsi, $||y_n - x|| \underset{n\to+\infty}{\to} \delta$. Comme H est complet par hypothèse il suffit de montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Pour cela on utilise l'identité du parallélogramme :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, ||x - y_p + x - y_q||^2 + ||y_p - y_q||^2 = 2(||x - y_p||^2 + ||x - y_q||^2)$$

Mais C est supposé convexe donc $\dfrac{y_p + y_q}{2}$ est dans C donc $||x - \dfrac{y_p + y_q}{2}|| \geq \delta$ donc $||x - y_p + x - y_q||^2 = 4||x - \dfrac{y_p + y_q}{2}|| \geq 4\delta^2$. Ainsi on obtient la majoration suivante :

$$||y_p - y_q||^2 \leq 2(||x - y_p||^2 - \delta^2 + ||x - y_q||^2 - \delta^2)$$

Comme le terme de droite tend vers 0 quand $\min(p, q) \to +\infty$ on vient de montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite de Cauchy qui converge donc vers $y \in C$ car C est fermé. La continuité de la norme achève la preuve de l'existence.
Passons à l'unicité. Soit z un élément de C qui vérifie aussi $d(x, C) = d(x, z)$. On pose alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite qui vaut y pour les n pairs et z pour les impairs. La preuve de l'existence montre que cette suite converge (car elle vérifie les hypothèse de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$) mais admet z et y en valeurs d'adhérence, d'où $y = z$ par unicité de la limite. Passons à l'équivalence.

$\Rightarrow$ Supposons que $y \in C$ et $\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$ pour tout $z \in C$. Grâce à l'hypothèse on trouve que

$$||x - z||^2 = ||x - y + y - z||^2 = ||x - z||^2 + ||y - z||^2 - 2\rangle x - y, z - y\rangle \geq ||x - y||^2$$

et donc y minimise la distance de x à C donc $d(x, C) = d(x, y)$. Comme on a supposé que $y \in C$, on a nécessairement $p_C(x) = y$.
$\Leftarrow$ Soit $z_0 \in C$. Pour tout $z \in C$, $||x - z||^2 \geq ||x - p_C(x)||^2$ donc en développant de la même manière qu'avant $||x - p_C(x) + p_C(x) - z||^2$ on trouve que

$$||z - p_C(x)||^2 - 2\langle x - p_C(x), z - p_C(x)\rangle \geq 0.$$

Mais comme C est convexe, pour tout $\lambda \in]0,1[$, $\lambda z_0 + (1-\lambda)p_C(x) \in C$ donc pour tout $\lambda \in]0,1[$,

$$\lambda^2||z_0 - p_C(x)||^2 - 2\lambda\langle x - p_C(x), z - p_C(x)\rangle \geq 0.$$

En divisant alors cette inégalité par λ et en faisant tendre λ vers 0 on obtient le résultat voulu.$\square$

Preuve du corollaire 1 : i) Très classique, pas forcément à prouver le jour j (continuité du produit scalaire)

ii) Le fait que $F \cap F^\perp = \{0\}$ est immédiat car un produit scalaire est définie.
Soit $x \in H$. Comme F vérifie les hypothèses du théorème on peut se donner $p_F(x)$ le projeté de x sur F. De plus le théorème nous dit que si $z \in F$ on a $\langle z - p_F(x), x - p_F(x)\rangle \leq 0$. Comme F est stable par combinaison linéaire, si $z \in F$ alors $2p_F(x) - z \in F$ donc le théorème nous dit alors que $\langle p_F(x) - z, x - p_F(x)\rangle = -\langle z - p_F(x), x - p_F(x)\rangle \leq 0$. Une quantité à la fois positive et négative vaut 0 donc $\langle z - p_F(x), x - p_F(x)\rangle = 0$ pour tout $z \in F$.
Finalement, $\langle x - p_F(x), z\rangle = \langle x - p_F(x), z - p_F(x)\rangle - \langle x - p_F(x), 0 - p_F(x)\rangle = 0$ où les deux termes du milieu valent 0 avec ce que l'on vient de démontrer (on prend $z = z$ pour le premier et $z = 0$ pour le deuxième). Ainsi $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ qui est une décomposition comme voulu car $p_F(x) \in F$ et $(x - p_F(x)) \in F^\perp$.

iii) $F \subset F^{\perp\perp}$ est immédiat. Pour l'inclusion réciproque on prend $x \in F^{\perp\perp}$ et on écrit $x = x_F + x_{F^\perp}$ grâce au ii). On a alors $\langle x, x_{F^\perp}\rangle = 0 = \langle x_F + x_{F^\perp}, x_{F^\perp}\rangle = ||x_{F^\perp}||^2 + \langle x_F, x_{F^\perp}\rangle = ||x_{F^\perp}||^2$ d'où $x_{F^\perp} = 0$ et le résultat voulu. $\square$

Preuve du corollaire 2 : Comme $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel fermé le corollaire 1 nous dit que $\overline{F} = \overline{F}^{\perp\perp}$. De plus, $F \subset \overline{F}$ donc $\overline{F}^\perp \subset F^\perp$ donc $F^{\perp\perp} \subset \overline{F}^{\perp\perp} = \overline{F}$. Comme un orthogonal est fermé et $F \subset F^{\perp\perp}$ en général il vient $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$. On vient de montrer par double inclusion que $\overline{F} = F^{\perp\perp}$. Le corollaire 1 nous dit alors que $H = F^\perp \oplus F^{\perp\perp} = F^\perp \oplus \overline{F}$ d'où le résultat. $\square$